Kompetenzorientierter Mathematikunterricht – Wie kann er umgesetzt werden?

GÜNTER HANISCH, ISABELLA BENISCHEK

Kurzfassung

Die Gesellschaft hat sich verändert, daher muss sich auch Schule und Unterricht verändern. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, gibt es etliche bildungspolitische Entscheidungen (Einführung der Bildungsstandards, neue Reife- und Diplomprüfung, Neue Mittelschule). Bei all diesen Reformen kommt der Kompetenzorientierung und dem kompetenzorientierten Unterricht ein großer Stellenwert zu. Der Unterricht verändert sich – von einer Inputorientierung hin zu einer Outputorientierung. Die Schüler/innen stehen im Zentrum. In diesem Beitrag wird daher der diesen Reformen zugrundeliegende Kompetenzbegriff von WEINERT erläutert, verschiedene Aspekte der Kompetenzorientierung werden dargelegt und vielfältige Aufgabenformate (wie sie auch bei zentralen Überprüfungen zur Anwendung kommen) werden erklärt.

1. Zum Kompetenzbegriff

Wenn von Kompetenz in Zusammenhang mit Unterricht und Schule gesprochen wird, so ist zunächst der Begriff zu klären. Seit den 1970er Jahren steht die Frage nach Kompetenz im Fokus von fachlicher und politischer Auseinandersetzung (OELKERS u. REUSSER, 2008, S. 23). Trotz umfassender Forschungsarbeiten zu diesem Konstrukt existieren nach wie vor keine einheitliche Definition und daher auch keine übereinstimmenden Aussagen darüber, wie Kompetenz vermittelt oder gemessen werden soll (EDELMANN u. TIPPELT, 2004, S. 7-10).

Generell ist man sich jedoch einig, dass Kompetenzen Wissen und Können verbinden. Der für die Bildungsstandards und für die neue Reife- und Diplomprüfung zugrunde liegende Kompetenzbegriff stammt von Weinert: Unter Kompetenzen versteht man „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (WEINERT, 2003, S. 27-28). In diesem Sinne sind Kompetenzen nicht unmittelbar messbare sondern indirekt beobachtbare Konstrukte, die Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Bewältigung von komplexen Problemstellungen darstellen. Zusätzlich zu den kognitiven Leistungsvoraussetzungen sind motivationale, volitionale und soziale Aspekte zu berücksichtigen, da sie ebenfalls Einfluss darauf haben, dass das einer Kompetenz entsprechende Verhalten in einer Anwendungssituation wirklich gezeigt wird (ZEITLER, KÖLLER u. TESCH, 2012, S. 24).

Der Kompetenzbegriff von Weinert vereint zentrale Begriffe, die handlungsleitend für kompetenzorientiertes Unterrichten in der alltäglichen Praxis sein können. Die Verbindung der kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten bedeutet, das Wissen mit dem Können – akademisches Wissen mit Handlungswissen – zu verbinden, und geht damit über das bloße Verstehen und Replizieren hinaus, das Lösen von vielfältigen Problemen steht im Vordergrund. Die eigenverantwortliche Nutzung von kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten zeichnet Kompetenz aus. Es werden aber auch die sozialen Voraussetzungen inkludiert.

Zusammenfassend geht es um den Aufbau eines lebendigen und anwendungsbezogenen Fachwissens. Je mehr Wissen eine Person hat und je besser dieses strukturiert ist, umso leichter kann damit hantiert werden und neue Informationen können damit in Beziehung gesetzt werden. Bedeutsam sind darüber hinaus auch methodische Kompetenzen – learning skills. Ein breites und vielfältiges Strategie- und Methodenrepertoire erhöht die Erfolgswahrscheinlichkeit für nachhaltiges Lernen. Ebenfalls sind Anschlusskompetenzen notwendig, Haltungen und Einstellungen, der Umgang mit sich selbst und anderen – Kommunikations-, Konflikt-, Integrationsfähigkeit (MÜLLER, 2008, S. 14).

In der Psychologie wird der Kompetenzbegriff enger gefasst, die Bereitschaft ist nicht inkludiert. „PISA“ verwendet den psychologischen Kompetenzbegriff, daher ist bei der Definition der mathematischen Kompetenz seitens der OECD die Bereitschaft nur mehr sehr abgeschwächt vorhanden und wird definiert als die Fähigkeit „die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht” (Deutsches PISA-Konsortium 2001, PISA 2000, S. 23).

Da beim Messen der psychologische Kompetenzbegriff verwendet wird, in dem die Bereitschaft keine Rolle spielt, ist es auch konsequent, dass das Ergebnis sowohl bei der Messung der Bildungsstandards als auch bei PISA für die Schüler/innen keine Konsequenzen hat. Dies könnte möglicherweise ein Grund sein, warum manche Schüler/innen keine oder nur wenig Bereitschaft gezeigt haben sich anzustrengen. Ebenso mag dies mit ein Grund dafür sein, dass die Ergebnisse der zentralen Reifeprüfung besser als bei den Vortestungen ausfallen, denn da geht es für die Schüler/innen um den Erhalt von Berechtigungen.

Allerdings lässt obige Definition von Kompetenz einen großen Interpretationsspielraum zu, beispielsweise wenn es um das Abgeben von fundierten mathematischen Urteilen geht. Das kann reichen von „Es ist richtig, dass $1 + 2 = 3$ ist.“ über „Die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist für x aus Q die leere Menge.“ bis „Ob es eine Menge gibt, deren Mächtigkeit größer als die Menge der natürlichen Zahlen aber kleiner als die der reellen Zahlen ist, ist eine Sache der Definition.“

Um diesen Spielraum einzuschränken werden im Rahmen der Überprüfung der Bildungsstandards und bei der kompetenzorientierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung Grundkompetenzenkataloge und Musteraufgaben (Überprüfungs-Items und Aufgabenbeispiele) zur Verfügung gestellt.

2. Kompetenzen im Mathematikunterricht

In weiterer Folge stellt sich nun die Frage, wie denn Kompetenzorientierung im Unterricht – speziell im Mathematikunterricht – umgesetzt werden kann. Die Grundfrage ist demnach auch, was generell guter Unterricht ist. Dabei gibt es Expertinnen/Experten wie beispielsweise WAGENSCHEIN, FREUDENTHAL, RUF, GALLIN oder LEUDERS, die an diese Frage eher normativ herangehen, indem sie basierend auf praktischen Erfahrungen und theoretischen Überlegungen formulieren, was guter Unterricht sein soll. WEINERT, HELMKE, BOHL oder LIPOWSKY gehen dagegen eher empirisch vor, sie versuchen durch Methoden der Unterrichtsforschung herauszufinden, wie guter Unterricht gestaltet sein kann. Die dritte Möglichkeit ist die allgemeindidaktische Orientierung – z.B. bei MEYER, wo unabhängig von Besonderheiten eines Unterrichtsfachs begründet wird oder die fachdidaktische Orientierung, wo bewusst die Frage nach einem guten Fachunterricht gestellt wird (z.B. bei HEYMANN oder SCHÜTTE) (BARZEL, HOLZÄPFEL, LEUDERS u. STREIT, 2011, S. 18).

Jede Lernerin/jeder Lerner bringt Kompetenzen in die Schule und den Unterricht mit. Das Ziel von Unterricht ist es daher, diese bereits vorhandenen Kompetenzen auf ein höheres Niveau hin zu fördern und zu entwickeln (LEISEN, 2010, S. 63).

Unterricht ist aber auch als dialogisches Geschehen zu verstehen, die Lehrperson vermittelt, was die Schüler/innen für ihr derzeitiges und späteres Leben brauchen. Der Lehrplan, beeinflusst durch Wirtschaft, Gesellschaft und Zeitgeist, gibt die Inhalte vor. Das Erkennen von Defiziten bei den Lernenden war bis vor kurzer Zeit ein wesentliches Ziel, damit mit entsprechender Unterstützung und Förderung an deren Minimierung gearbeitet werden kann. Die bereits vorhandenen Ressourcen wurden dabei allerdings kaum genützt. Solch eine Defizitorientierung ist jedoch ein Hemmnis für einen dialogischen Prozess, denn die Weiterentwicklung und Förderung von Potenzialen steht nicht im Mittelpunkt. Kompetenzorientierter Unterricht sollte sich danach ausrichten, dass Aufgaben für Lernende so vorbereitet werden, dass sie zu deren Lösung einerseits auf vorhandene Ressourcen zurückgreifen können und andererseits neue Lösungsstrategien entdecken und üben können. So kann bereits vorhandenes Wissen mit neuem verknüpft werden. Zuletzt muss aber auch der Präsentation dieser erworbenen und geübten Kompetenzen Raum gegeben werden (MÜRWALD-SCHEIFINGER u. WEBER, 2011, S. 109-110). Allerdings – so muss kritisch bemerkt werden – könnte das zentrale Überprüfen der Kompetenzen für obiges Ziel kontraproduktiv sein, wenn lediglich darauf hingearbeitet wird, dass die Schüler/innen die zentral vorgegebenen Kompetenzen beherrschen.

Kompetenzorientierung hat in allen Phasen des Unterrichts seinen Stellenwert, kann aber je nach Unterrichtssituation unterschiedlich akzentuiert sein. Bei der Erarbeitung von neuen Inhalten könnte problemorientiertes Hinterfragen, das Entdecken von neuen Inhalten und Fragestellungen, das Systematisieren von gefundenen Fragestellungen, das Finden von Anknüpfungspunkten an bereits vorhandenes Wissen, das Reflektieren über mathematische Erkenntnisse, oder das Zusammenbringen von altem und neuem Wissen im Fokus stehen. In Übungs- oder Vertiefungsphasen sind unter anderem das Sichern von Grundkompetenzen und Basiswissen, das Erschließen von Aufgaben nach Verstehens-Orientierung, das Gestalten von motivierenden und produktiven Übungseinheiten und die Durchführung von Differenzierung und Individualisierung wesentlich. Aber auch in Phasen der Leistungsüberprüfung ist Kompetenzorientierung wichtig. Hier sollen möglichst viele Kompetenzaspekte eingeschlossen werden, unterschiedliche Aufgabenformate zu Überprüfung von verschiedenen Kompetenzen und Aufgaben, die eine möglichst breites Spektrum an Informationen liefern, sollten eingesetzt werden (MÜRWALD-SCHEIFINGER u. WEBER, 2011, S. 112).

Hier könnte sich gleich eine weitere Forderung anschließen, nämlich jene, Mathematik mit allen Sinnen zu erfahren. Dies ist kein Selbstzweck sondern die Idee, in der Mathematik mehr zu sehen als Abstraktes, Formales und Algebraisches. Mathematik soll durch konkrete Erfahrungen für die Schüler/innen zugänglicher gemacht werden. Dies ist zwar nicht bei allen Themengebieten und Teilbereichen in gleichem Maße möglich, es gibt aber doch immer und überall Bezüge zum Alltag, zum Berufsleben, zur Wirtschaft usw. Die Chance, Mathematik mit konkreten Erfahrungen zu verbinden, sollte so oft wie möglich in sinnvollem Rahmen genutzt werden, denn aus der Hirnforschung ist bekannt, dass Erkenntnisse, die aus einem aktiven Erleben entstehen, nachhaltiger verfügbar sind (BARZEL, 2010, S. 10).

Mathematik hat viel mit dem Lösen von Problemstellungen des Alltags und der Berufswelt zu tun und die können oftmals leichter gelöst werden, wenn die richtigen Fragen gestellt werden. Heuristische Strategien können dabei hilfreich sein. Es ist aber auch notwendig, dass die Schüler/innen kreativ sind und viele Ideen für Fragen entwickeln. Um die Kreativität zu schulen, können Übungen wie folgende vorgenommen werden (siehe dazu auch HANISCH 1982 und WIRTNER 1994):

- In einer Konditorei wird eine neue Mehlspeise entwickelt. Wie kann Mathematik dabei hilfreich sein?
- Was ist bei der Renovierung eines Raumes/eines Hauses alles zu berücksichtigen und wo könnten auftretende Fragen mit Hilfe der Mathematik beantwortet werden?
- Was ist beim Bau einer Zufahrtstraße zu beachten und wo wird dabei Mathematik benötigt?
- Wir machen einen Spaziergang und haben die Mathematikbrille auf – wo überall ist Mathematik enthalten?

Eine wesentliche Problemlösungsstrategie ist, herauszufinden, wie sich aus den gegebenen Größen oder Bedingungen unmittelbar etwas berechnen, ableiten oder folgern lässt. BRUDER und COLLET sind der Meinung, dass bei bewusster Anwendung von heuristischen Strategien auch ein Weiterkommen bei scheinbar schwierigen Problemen leichter möglich ist und dass auch leistungsschwächere Schüler/innen dadurch zu Erfolgserlebnissen kommen. Sowohl im mathematischen Kontext als auch im Alltag können vier wesentliche Faktoren von geistiger Beweglichkeit aufgezeigt werden: Reduktion (Fähigkeit zur Vereinfachung und Betrachtung von Teilaspekten), Reversibilität (Fähigkeit zur Umkehr von Gedankengängen), Aspektbeachtung (Fähigkeit zur gleichzeitigen Beachtung von mehreren Aspekten, Erkennen und Variation von Abhängigkeiten), Aspektwechsel (Fähigkeit zur Umstrukturierung von Sachverhalten oder Einnahme eines anderen Blickwinkels) (BRUDER u. COLLET, 2010, S. 18-22).

In Zusammenhang mit der Schulung von Kreativität und für einen kreativen Unterricht ist das Variieren von Aufgaben eine gute Möglichkeit. Schüler/innen lösen dabei nicht nur vorgegebene Aufgaben, sondern sie erfinden auch eigene „Probleme“. Dabei erleben sie unter anderem die Unvorhersehbarkeit von mathematischen Erkundungen, denn mathematische Probleme können ganz unterschiedlich schwierig sein. Aufgabenvariationen können oft nicht mit eingefahrenen Arbeitsweisen bearbeitet werden, es muss eine offene Auseinandersetzung erfolgen. Die hat häufig zur Folge, dass die Motivation und Freude an Mathematik steigt. Beispiel: Wird die Seitenlänge eines Quadrats um 3 cm verlängert, dann beträgt sein Flächeninhalt 361 cm². Welchen Flächeninhalt hatte das ursprüngliche Quadrat? → Variation: Verkürzung der Seitenlänge, Veränderung der Diagonalen, usw. Dabei sollen die Schüler/innen selbst die Variationen „erfinden“ (LENEKE, 2010, S. 113-117).

Da im Mathematikunterricht Aufgaben eine wesentliche Rolle spielen, ist zu überlegen, wann eine Aufgabe eine „gute“ Aufgabe ist. Nach Leuders sollten unter anderem folgende Merkmale gegeben sein: Authentizität – Bedeutsamkeit – Relevanz, Offenheit, Aufforderungscharakter (gegeben durch Anwendungsrelevanz, aktuellen Bezug, kognitiven Konflikt, Bezug zur Wahrnehmungswelt der Schüler/innen, Präsentationsform, innermathematische Eigenschaften). Viele Aufgaben werden in eine nette Geschichte verpackt, aber mit der Wirklichkeit hat dies nicht viel zu tun (z.B.: Es ist eine Rechnung gegeben, wo ein Teil dieser unkenntlich gemacht wurde. Dies ist in eine „Geschichte“ verpackt: Ein Regentropfen fiel auf eine bestimmte Zahl und verwischte sie. Berechne die nicht mehr lesbare Zahl!). Die objektive Relevanz einer Aufgabe ist nur dann motivierend, wenn den Schülerinnen und Schülern der Nutzwert glaubhaft gemacht werden kann. Von vorn herein sind Aufgaben motivierend, die eine subjektive Relevanz für die Lernenden haben, wo Schüler/innen die Bedeutsamkeit für ihre aktuelle Lebenssituation empfinden. Werden echte Probleme im Mathematikunterricht behandelt, so sind diese offen, das bedeutet unter anderem, dass nicht von vorn herein klar ist, mit welchen Methoden an die Lösung herangegangen werden soll (LEUDERS, 2001, S. 94-103).

In die Kategorie von offenen und motivierenden Aufgaben fallen auch Fermi-Aufgaben. Darunter wird ein Typ von Aufgaben verstanden, dessen Ursprung auf den Physiker Enrico FERMI zurückgeht. In der Physik ist es oftmals notwendig, Größen abzuschätzen, zu denen Informationen fehlen oder wo keine eindeutige Berechnungsformel zur Verfügung steht. Fragestellungen, die diese Fähigkeiten fordern und fördern, werden als FERMI-Aufgaben (siehe auch EBERSDORFER, 2011) bezeichnet. Mit solchen Aufgaben werden unter anderem folgende Kompetenzen gefördert: Stellen von Fragen, Benutzung von Alltagswissen, Arbeit mit großen Zahlen, Umrechnung von Größen, überschlagendes Rechnen, vorteilhaftes Rechnen, Weiterarbeit auch bei vagen Angaben, Überprüfung und Bewertung von Ergebnissen, usw. (LEUDERS, 2001, S. 103-104).

1240 Um das Dreifache!

1240 Tom und Sara bleiben erstaunt vor einer Auslage mit einem Riesenschuh darin stehen. Um wie viel wurde dieser Schuh vergrößert?

Aus MatheFit 1, Seite 274/ Aufgabe 1240Aus MatheFit 2, Seite 33/ Aufgabe 106

106 Arbeitet zu zweit oder in einer Gruppe zusammen!
Ein Riese?
a) Wie groß wäre wohl ein Kind, das solch ein großes Auge wie auf dem Plakat hat?
b) Wie viel mal größer wäre dieses „Riesenkind" dann als du?

106 a) ca. 75 m
b) ca. 50 mal größer

Um mathematische Themen wirklich zu durchdringen und zu können, bedarf es der Übung. Wenn dies jedoch nur in der Form passiert, dass gleiche oder ähnliche Aufgaben mit ein und derselben Strategie gelöst werden, dann verlieren die Schüler/innen sehr schnell ihr Interesse daran, die Motivation sinkt. Daher ist „intelligentes Üben" gefordert. LEUDERS schreibt, dass Üben eine sehr abwechslungsreiche Sache sein kann, wenn es mit mathematischen Entdeckungen und Reflexionen einhergeht. In derartigen Aufgaben werden Vorstellungen gefestigt, mathematische Begriffe und Verfahren werden reflektiert. Die Lernenden untersuchen beispielsweise mathematische Strukturen und üben dabei eigentlich ganz selbstverständlich Grundfertigkeiten.

Aus MatheFit 1, Seite 45/ Aufgabe 171

171 Wie könntest du in den folgenden Beispielen die Summe schnell finden?

a) 52 + 45 + 38 + 15 = **b)** 13 + 8 + 9037 =
c) 202 + 16 + 4 + 68 = **d)** 27 + 15 + 7333 =

171 Vertauschungsgesetz anwenden. **a)** 150 **b)** 9058 **c)** 290 **d)** 7375

Übungsbeispiele gibt es auch in jedem anderen Schulbuch und mit jedem kann kreativ umgegangen werden. Gute Übungsaufgaben sollen zielgemäß, sinnstiftend (wozu dient die Übung), entdeckungsoffen (nicht nur lineares Abarbeiten von vorgegebenen Tätigkeiten, sondern Anregung für eigene Wege), selbstdifferenzierend (starke und schwache Schüler/innen können mit den Aufgaben arbeiten), reflexiv (Aufgaben regen zum Nachdenken an). Die Automatisation von Fähigkeiten sollte niemals allein im Fokus von Üben stehen (LEUDERS, 2010, S. 130-134).

- Ursprüngliches Beispiel: Berechne den Mittelwert von 143 und 267!
- Weiterentwicklung: Schätze zuerst den Mittelwert! Beschreibe, was du dir dabei gedacht hast! Berechne den Mittelwert und vergleiche mit deiner Schätzung! Schreibe auf, was du aus den Aufgaben gelernt hast!
(LEUDERS, 2010, S. 131).

3. Aufgabenarten

An dieser Stelle soll auf unterschiedliche Aufgabentypen und Aufgabenarten eingegangen werden. Allgemein kann zwischen Lernaufgaben und Prüfungsaufgaben unterschieden werden.

Aufgaben zum Lernen …	Aufgaben zum Prüfen …
• fördern und ermöglichen Kreativität, eigenes Entdecken und Neugier	• bewirken Leistungserwartung und Leistungserleben
• gestatten Fehler als Chance	• billigen Fehler nicht
• haben Aufforderungscharakter und Problemorientierung	• sind von außen veranlasst (z.B. Test, Probe, Klassenarbeit)
• ermöglichen Kooperation und Kommunikation	• sind meist eine Einzelleistung
• sind oft prozessorientiert	• sind oft produktorientiert
• unterstützen den Aufbau von Kompetenzen	• zeigen, wie bestimmte Kompetenzen angewendet werden

Tabelle 1: Unterschiedliche Anforderungen an Aufgaben (WALTHER, 2011, S. 25)

Lehrpersonen fällt es zumeist relativ leicht, Prüfungsaufgaben für ihre Schüler/innen zu gestalten. Schwieriger wird es bei der Entwicklung von Testaufgaben z.B. für die Bildungsstandards-Überprüfung oder für die „Zentralmatura“, da die Anforderungen an solche Aufgaben höher sind. Sie werden mit Hilfe des Rasch-Modells überprüft, wobei eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit **dieses** Modells ist, dass die Aufgaben raschhomogen sind, d.h. alle dieselbe Fähigkeit messen.

Weiters ist es für zentral gestellte Aufgaben notwendig, dass die Schreibweise für alle Schüler/innen dieselbe ist.

Eine weitere Problematik beim zentralen Überprüfen ist, dass die Schüler/innen unterschiedliche Lernvoraussetzungen mit sich bringen. Das Ziel ist allerdings für alle das gleiche (z.B. Bildungsstandards, Matura), der Weg dorthin kann jedoch sehr unterschiedlich sein.

Die Überprüfung der gelösten Aufgaben soll objektiv sein, d.h, unterschiedliche Beurteiler/innen sollen zum selben Ergebnis kommen. Auswertungsobjektivität zu erreichen geht relativ leicht bei “Ankreuzaufgaben“. Daher wurden neue Aufgabenformate eingeführt. Die Schüler/innen müssen nun die Zusatzkompetenz erwerben, solche für sie neuartigen Aufgabenformate zu bearbeiten. Das hat zwar vorrangig nichts mit „mathematischer Kompetenz“ zu tun, muss aber trainiert werden. (Weiter unten wird noch näher darauf eingegangen)

Für den Unterricht aber viel bedeutender als die Prüfungsaufgaben sind Lernaufgaben. Für die Konstruktion solcher Aufgaben hat sich folgendes Vorgehen bewährt:

„1. das Lernthema […] festlegen,

2. Aufgabenteile zusammensuchen,

3. das neu zu Lernende festlegen,

4. klären, ob das neu zu Lernende von den Lernenden selbstständig bearbeitbar ist (Knackpunkte erkennen) und ob das Lernthema als Lernaufgabe sinnvoll ist,

5. Informationen zur Auswertung zusammenstellen und Lernprodukte festlegen,

6. eine Ablaufstruktur festlegen,

7. Bearbeitungsaufträge formulieren, Materialien und Hilfen erstellen.“ (LEISEN, 2010, S. 66)

Nicht nur die Wahl der Aufgaben beeinflusst das Unterrichtsgeschehen, sondern auch die Wahl der Unterrichtsmethode. „Erfolgreiches Lernen wird ermöglicht durch eine Vielzahl von Unterrichtsmethoden, bei denen sowohl selbsttätige als auch gelenkte Lernprozesse flexibel und situationsabhängig eingesetzt werden." (LEUDERS, 2001, S. 148) In einem kompetenzorientieren Unterricht ist jedoch zu beachten, dass die Kompetenzen der Schüler/innen im Zentrum stehen.

Ein Überblick über diese Vielzahl von Unterrichtsmethoden liefert folgende Grafik:

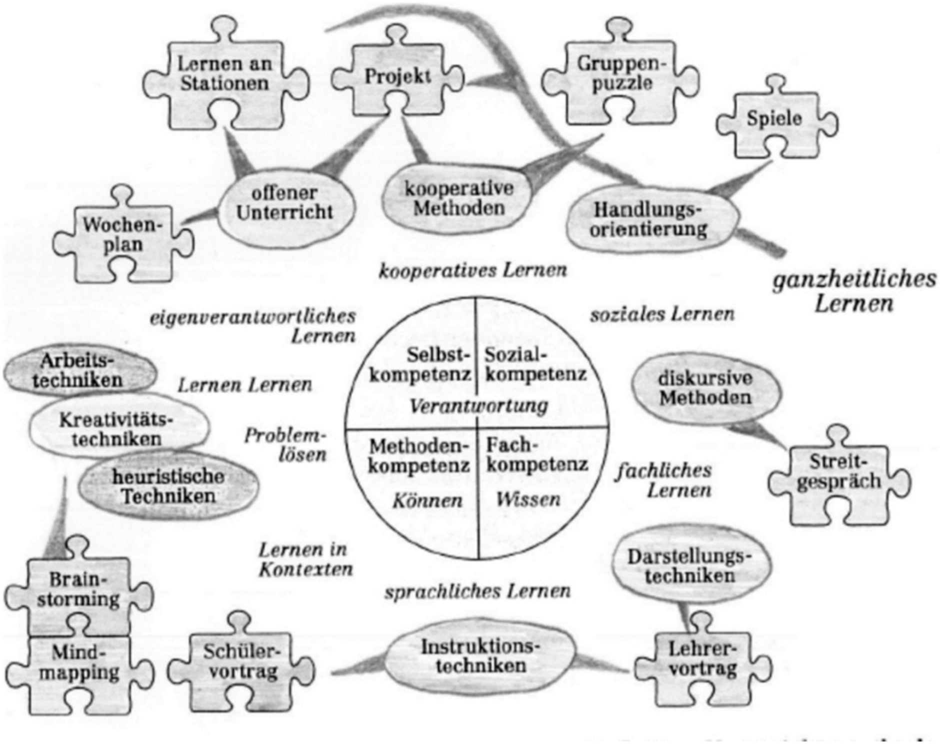


Abbildung 1: Mindmap Unterrichtsmethoden (LEUDERS, 2001, S. 154).

4. Aufgabenformate

Aufgaben können unterschiedlich ausschauen, es gibt verschiedene Aufgabentypen, die je unterschiedlicher Kompetenzen (mathematische und außermathematische) für die Lösung bedürfen.

Generell kann dabei zwischen offenen, halb-offenen und geschlossenen Antwortformaten unterschieden werden.

Bei den offenen Formaten sind beispielsweise ein Text, Zahlen oder Symbole vorgegeben und der Arbeitsauftrag lautet: „Berechne …" oder „Begründe …" oder „Erkläre …", usw. Diese Art von Aufgaben eigenen sich sehr gut zum Lernen und Üben.

Aus MatheFit 1, Seite 135/ Aufgabe 472 → Rechnen, aber auch „kritisches“ Denken

512 Sara und Tom besuchen oft eine Tierhandlung um sich die Tiere anzuschauen. Letzte Woche waren 7 Zwerghasen, 5 Wellensittiche und **a)** 5 **b)** 7 Meerschweinchen zu verkaufen. Eine Woche später waren nur mehr 4 Zwerghasen, 3 Wellensittiche und 4 Meerschweinchen da. Schreibe das „mathematisch“ an und berechne wie viele Tiere jeder Art verkauft wurden!
Was musst du voraussetzen, damit du die Rechnung durchführen kannst?

512
a) $7z + 5w + 5m - 4z - 3w - 4 = 3z + 2w + m$, also wurden 3 Zwerghasen, 2 Wellensittiche und 1 Meerschweinchen verkauft.
b) $7z + 5w + 7m - 4z - 3w - 4m = 3z + 2w + 3m$, also wurden 3 Zwerghasen, 2 Wellensittiche und 3 Meerschweinchen verkauft. Vorausgesetzt wird, dass keine Tiere dazu gekommen und keine verstorben sind.

Aus MatheFit 2, Seite 110/ Aufgabe 465 → reale Begründungen suchen

465 Die 5 Seehunde eines Zoos erhalten im Winter täglich $22\frac{1}{2}$ kg Futter. Im Sommer erhalten sie wesentlich weniger, nämlich nur $12\frac{1}{2}$ kg. Warum – glaubst du – ist das so? Wie viel erhält durchschnittlich jeder Seehund **(1)** im Winter **(2)** im Sommer?

Aus MatheFit 3, Seite 185/ Aufgabe 871

871 Begründe die Flächeninhaltsformel $A=\frac{e \cdot f}{2}$ für das Deltoid! Verwende wahlweise die Methode *Zerlegen in bekannte Figuren* oder *Ergänzen zu bekannten Figuren!*

Aus MatheFit 4, Seite 147/ Aufgabe 637

637 Eine Autovermietung verlangt für einen Kleintransporter pro Tag 84 € und für jeden gefahrenen Kilometer 35 c. Gib eine Formel an, mit der du den Mietpreis für beliebig viele Tage und beliebig viele Kilometer ausrechnen kannst? Erkläre diese Formel!

637 $p = 84 \times$ Anzahl der Tage$+ 0,35\times$ gefahrene Kilometer

Bei den halboffenen Antwortformaten muss zwar auch etwas „berechnet“ werden, die Lösung ist aber eindeutig und kann beispielsweise durch eine einzige Zahl dargestellt werden.

Aus MatheFit 3, Seite 161/ Aufgabe 735

735 Von einem Quadrat ist die Größe des Flächeninhalts bekannt. Berechne die Länge der Diagonalen!
a) A = 33,64 dm^2 **b)** A = 198,81 cm^2

Lösung: d = ______

Aus MatheFit 4, Seite 169/ Aufgabe 733

733 Ein Weg von A auf das hohe B beträgt 9 Kilometer. Gleichzeitig, um 8 Uhr morgens, brechen zwei Wanderer von den beiden Endpunkten dieses Weges auf. Wann treffen sie einander, wenn der aufwärts gehende Wanderer 63 Meter pro Minute zurücklegt, der abwärts gehende hingegen 87 Meter pro Minute?

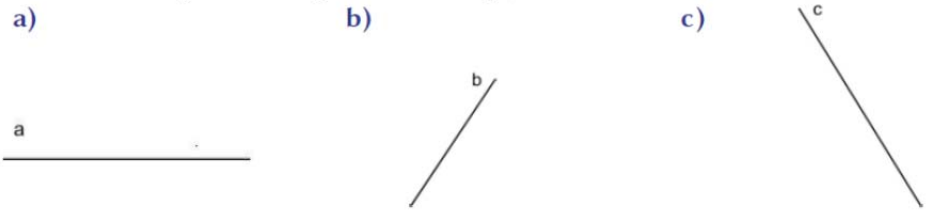
733 $63x + 87x = 9000 \Rightarrow$ Nach einer Stunde

Lösung: Sie treffen einander nach _________.

Beim Konstruktionsformat wird von den Schülerinnen und Schülern eine „Zeichnung“ (Konstruktion von Geraden, Kurven, Punkten auf unliniertem Papier oder Linienpapier) gefordert.

Aus MatheFit 1, Seite 106/ Aufgabe 364

379 Zeichne zu den Geraden parallele Geraden im Abstand von 2 cm. Überlege dir, ob es mehrere Möglichkeiten gibt und wenn ja, dann zeichne sie ein!



Aus MatheFit 2, Seite 194/ Aufgabe 899

899 Zeichne einen Kreis mit dem Radius r = 3 cm und zwei parallele Sekanten (Geraden, die den Kreis schneiden).

a) Verbinde die Schnittpunkte miteinander! Welches Viereck ist entstanden?

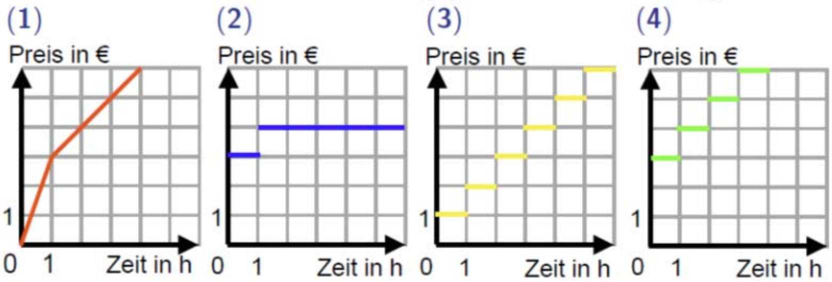
b) Paula Kuddelmuddel meint, dass man die Sekanten auch so einzeichnen könnte, dass ein Quadrat entsteht. Hat sie (ausnahmsweise) Recht?

Bei den Multiple-Choice-Aufgaben stehen unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung (z.B. 2 aus 5, 1 aus 6, x aus 5). Dabei wird mittels Kreuzen angemerkt, ob die Aussage bzw. die Aussagen zutreffen. Obwohl jedoch nur eine (oder mehrere) Markierung(en) zu setzen ist (sind), verlangt dieses Format eine Menge an (mathematischen und außermathematischen) Kompetenzen, vorausgesetzt, die Distraktoren sind gut gewählt.

MatheFit 4, Seite 197/ Aufgabe 822

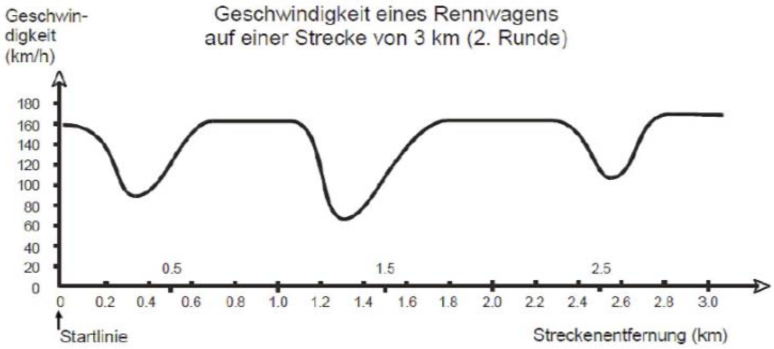
822 Beim Fahrradverleih „Blitz“ kostet die erste Stunde 3,–€ und jede weitere angefangene Stunde 1,–€. Welches Diagramm zeigt die Verleihkosten des Fahrradverleihs in Abhängigkeit von der Zeit? Begründe!

822 grün



MatheFit 4, Seite 185/ Aufgabe 788

788 *Geschwindigkeit eines Rennwagens:* Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen, flachen Rennstrecke variiert.



Frage 4 existiert nicht in den freigegebenen Pisaaufgaben.

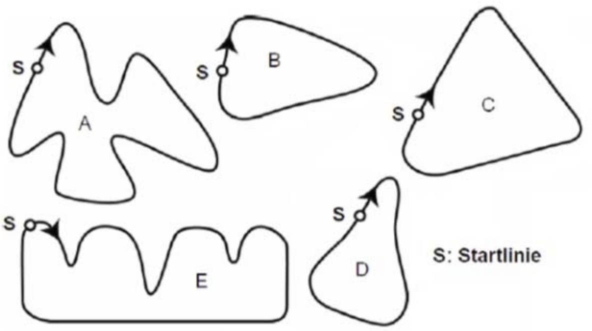
788 (1) B (2) C (3) B (5) B

Frage 1: Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geraden Abschnitts der Rennstrecke?
A 0,5 km B 1,5 km C 2,3 km D 2,6 km

Frage 2: Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit aufgezeichnet?
A an der Startlinie
B bei etwa 0,8 km
C bei etwa 1,3 km
D nach der halben Runde

Frage 3: Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen von 2,6 km und 2,8 km sagen?
A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
C Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
D Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

Frage 5: Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken: Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, sodass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



Weitere Aufgabenformate sind Lückentexte sowie Zuordnungsaufgaben:

Aus MatheFit 1, Seite 79/ Aufgabe 319

319 Welche Aufgabe gehört zu welcher Rechnung? Verbinde die richtigen Kästchen miteinander!

Vermehre die Summe der Zahlen 48 und 8 um das Produkt dieser Zahlen!		$2 \cdot (84 : 21) =$
Addiere zum Quotienten aus 712 und 8 die Zahl 89!		$(48 + 8) + (48 \cdot 8) =$
Vermindere das Produkt aus 48 und 8 um die Summe der Zahlen 48 und 8!		$(48 - 8) + (48 \cdot 8) =$
Subtrahiere 89 vom Produkt der Zahlen 712 und 8!		$(712 : 8) + 89 =$
Vermindere die Differenz der Zahlen 712 und 8 um 89!		$(712 \cdot 8) + 89 =$
Vergrößere die Differenz der Zahlen 48 und 8 um das Produkt dieser beiden Zahlen!		$(712 \cdot 8) - 89 =$
Bilde die Summe aus dem Produkt der Zahl 712 und 8 und der Zahl 89!		$(712 - 8) - 89 =$
Verdopple den Quotienten der Zahlen 84 und 21!		$2 \cdot (84 + 21) =$
Addiere zu 2 die Differenz der Zahlen 84 und 21!		$(48 \cdot 8) - (48 + 8) =$
Bilde das Produkt aus 2 und der Summe der Zahlen 84 und 21!		$2 + (84 - 21) =$

319 Textspalte: Bezeichnungen von A bis J, Rechnungsspalte: Nummerierung von 1 bis 10; richtige Zuordnung: A-2, B-4, C-9, D-6, E-7, F-3, G-5, H-1, I-10, J-8

Aus MatheFit 3, Seite 203/ Aufgabe 951

951 Setze die Wörter in die richtige Stelle ein:

alle Außenglieder Gleichung Innenglieder Proportion Quotienten

Unter dem Verhältnis zweier Größen a und b versteht man ihren ___Quotienten___, unter dem mehrerer Größen __alle__ Quotienten je zweier Größen.

Eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen nennt man Verhältnisgleichung oder ___Proportion___. Mit der Proporz-Knack-Regel kann sie in eine „gewöhnliche" ___Gleichung___ verwandelt werden.

Die Proporz-Knack-Regel heißt: Produkt der ___Außenglieder___ = Produkt der ___Innenglieder.___

Aus MatheFit 3, Seite 224/ Aufgabe 1064

1064 Vervollständige die Sätze:

a) Ein Quadrat mit doppelter Seitenlänge hat den ___vierfachen___ Flächeninhalt.

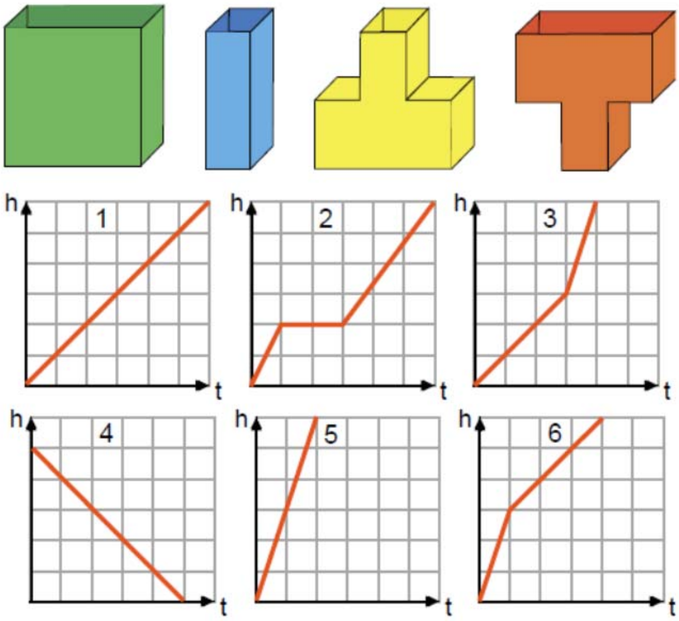
b) Ein Quadrat mit dreifacher Seitenlänge hat den ___neunfachen___ Flächeninhalt.

c) Ein Quadrat mit k-facher Seitenlänge hat den ___k^2-fachen___ Flächeninhalt.

Aus MatheFit 4, Seite 197/ Aufgabe 823

★ **823** Die abgebildeten Behälter werden mit Wasser gefüllt, wobei in jeder Sekunde gleich viel Wasser dazu läuft. Die folgenden Funktionsgraphen geben die Füllhöhe h in Abhängigkeit von der Zeit t an. Welcher Behälter gehört zu welchem Diagramm?

823 grün: 1, blau: 5, gelb: 3, rot: 6



4. Zusammenfassung

Die Veränderungen der Gesellschaft bedingen auch eine Veränderung des Bildungssystems. Dies drückt sich sowohl in der Umsetzung von Kompetenzorientierung aus als auch in verschiedenen bildungspolitischen Reformen (Bildungsstandards, Neue Reife- und Diplomprüfung, Neue Mittelschule). Wesentliche Bausteine eines kompetenzorientierten Unterrichts sind beispielsweise: genaues Beobachten und Diagnostizieren, individuelles Fördern und gemeinsamer Unterricht, eine kognitiv und sozial aktivierende Aufgabenkultur, ein systematischer Wissensaufbau, realitätsnahe Anwendungssituationen und Metakognition (MEYER, 2012, S. 15-16).

Literatur

BARZEL, B. (2010). Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In LEUDERS, T., HEFENDEHL-HEBEKER, L., WEIGAND, H.-G. (Hrsg.). *Mathe Magische Momente*. Berlin: Cornelsen. S. 6-17.

BARZEL, B., HOLZÄPFEL, L., LEUDERS, T. u. STEIT, C. (2011). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren.* Berlin: Cornelsen.

BRUDER, R., COLLET, C. (2010). Problemlösen kann man lernen! In LEUDERS, T., HEFENDEHL-HEBEKER, L. u. WEIGAND, H.-G. (Hrsg.). *Mathe Magische Momente.* Berlin: Cornelsen. S. 18-29.

Deutsches PISA-Konsortium 2001, PISA 2000, S. 23.

HANISCH, G. (1982). Kreativitätsförderung im Mathematikunterricht. In GROSSER, S. (Hrsg.). *Didaktik-Reihe der ÖMG*, Heft 9. S. 71-88.

EBERSDORFER, A. (2011). *Mehr denken als rechnen: Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht.* Diplomarbeit der Universität Wien.

EDELMANN, D. u. TIPPELT, R. (2004). Kompetenz – Kompetenzmessung: ein kritischer Überblick. In *Durchblick*, 3. S. 7-10.

HANISCH, G., BENISCHEK, I., HAUER-TYPELT, P. u. SATTLBERGER, E. (2014, 2. Auflage im Druck). *MatheFit 1*. Wien: Besseres Buch.

HANISCH, G., BENISCHEK, I., HAUER-TYPELT, P. u. SATTLBERGER, E. (2009). *MatheFit 2*. Wien: Besseres Buch.

HANISCH, G., BENISCHEK, I., HAUER-TYPELT, P. u. SATTLBERGER, E. (2010). *MatheFit 3*. Wien: Besseres Buch.

HANISCH, G., BENISCHEK, I., HAUER-TYPELT, P. u. SATTLBERGER, E. (2011). *MatheFit 4*. Wien: Besseres Buch.

KRATZ, H. (2011). *Wege zu einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht*. Seelze: Klett/Kallmeyer.

LEISEN, J. (2010). Lernaufgaben als Lernumgebung zur Steuerung von Lernprozessen. In KIPER, H., MEINTS, W., PETERS, S., SCHLUMP, S. u. SCHMIT, S. (Hrsg.). *Lernaufgaben und Materialien im kompetenzorientieren Unterricht.* Stuttgart: Kohlhammer. S. 60-67.

LENEKE, G. (2010). Aufgaben variieren – Mathematik erfinden und erleben. In LEUDERS, T., HEFENDEHL-HEBEKER, L. u. WEIGAND, H.-G. (Hrsg.). *Mathe Magische Momente*. Berlin: Cornelsen. S. 112-119.

LEUDERS, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen

MEYER, H. (2012). *Kompetenzorientierung allein macht noch keinen guten Unterricht.* Unveröffentlichtes Skriptum. Oldenburg

MÜLLER, A. (2008). *Mehr ausbrüten, weniger gackern. Denn Lernen heisst: Freude am Umgang mit Widerständen. Oder kurz: Vom Was zum wie*. Bern: hept Verlag.

MÜRWALD-SCHEIFINGER, E. u. WEBER, W. (2011). Kompetenzorientierter Unterricht – Sekundarstufe I – Mathematik. In Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation u. Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.). *Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis.* Graz: Leykam.

OELKERS, J. u. REUSSER, K. (2008). *Expertise: Qualität entwickeln – Standards sichern – mit Differenzen umgehen*. Berlin: Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.)

WALTHER, G. (2011). Die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen fördern. In DEMUTH, R., WALTHER, G. u. PRENZEL, M. (Hrsg.). Unterricht entwickeln mit SINUS. 10 Modelle für den Mathematik- und Sachunterricht in der Grundschule. Seelze: Kallmeyer/Klett

WEINERT, F.E. (2003). *Leistungsmessungen in Schulen*. Weinheim: Beltz.

WIRTNER, B. (1994). *Kreativitätsförderung im Mathematikunterricht.* Diplomarbeit der Universität Wien.

ZEITLER, S., KÖLLER, O. u. TESCH, B. (2012). Bildungsstandards und ihre Implikationen für Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung. In GEHRMANN, A., HERICKS, U. u. LÜDERS, M. (Hrsg.). *Bildungsstandards und Kompetenzmodelle. Beiträge zu einer aktuellen Diskussion über Schule, Lehrerbildung und Unterricht*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 23-36.

Verfasser

Günter Hanisch
Universität Wien
Fakultät für Mathematik, Institut für Mathematik
Nordbergstraße 5,1090 Wien
`guenter.hanisch@univie.ac.at`

Isabella Benischek
BIFIE Wien
Bereichsleiterin Qualitätsentwicklung
Stella-Klein-Löw-Weg 15 / Rund Vier B, 1020 Wien
`isabella.benischek@aon.at`